Revisão - Aula 16

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

15 de Março de 2023

Análise na rede
Análise no YouTube

Primeiro Semestre de 2023
SMA 0380

Cortes de Dedekind (1831 a 1916)

A idéia que queremos usar para construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ é:

> "O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

[redacted]

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$.*

[redacted]

- *Se* $q \in \mathbb{Q}$ *definimos* $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. *Então* q^* *é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*
- $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é irracional.*

[redacted]

- *Se* α *é um corte,* $p \in \alpha$ *e* $q \notin \alpha$, *então* $p < q$.
- *Se* α *é um corte,* $r \notin \alpha$ *e* $r < s$, *então* $s \notin \alpha$.

[redacted]

Diremos que $\alpha < \beta$ *se* $\alpha \subsetneq \beta$

[redacted]

Se α, β, γ são cortes

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo conjunto não vazio de cortes A para o qual existe um corte L com* $a \leqslant L, \forall a \in A$ *tem um menor limitante superior* $(\sup A)$.

[redacted]

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

A adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

[redacted]

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β é dado por

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Multiplicação

[redacted]

- *Se α, β são cortes,*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha \cdot 0^* = 0^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists\ 0 < r \in \alpha \textit{ e } 0 < s \in \alpha \textit{ tais que } p \leqslant rs\}, \ \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) \textit{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \textit{ se } \alpha < 0^* \textit{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \textit{ se } \alpha > 0^* \textit{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

[redacted]

Se $\alpha \neq 0$ *existe um corte* $\alpha^{-1} \neq 0$ *tal que* $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*$.

- *Se* $\alpha > 0^*$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq q^{-1}$ *onde* $q > r$ *para algum* $r \notin \alpha\}$.
- *Se* $\alpha < 0^*$, $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$.

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

[redacted]

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso $\mathbb{R}$ é completo.

Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

[redacted]

$A \subset \mathbb{R}$ é **limitado***, se existe $L > 0$ tal que $|x| \leq L$, $\forall x \in A$.*

[redacted]

$A \subset \mathbb{R}$ é limitado se, e somente se, existe $L > 0$ tal que $A \subset [-L, L]$.

[redacted]

$A \subset \mathbb{R}$ é **ilimitado** *se não é limitado.*

[redacted]

$A \subset \mathbb{R}$ é ilimitado se, e só se, dado $L > 0$ existe $x \in A$ tal que $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

[redacted]

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- *A será dito* **limitado superiormente**, *se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq L$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, L será chamado **limitante superior** *de A.*

- *A será dito* **limitado inferiormente**, *se existir ℓ tal que $x \geq \ell$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

[redacted]

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \varnothing$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A, tivermos $\bar{L} \leq L$.

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, $\bar{L}$ será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem **supremo**.

Ínfimo

[redacted]

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \varnothing$. Diremos que $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\bar{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A, tivermos $\bar{\ell} \geq \ell$.

- Quando $\bar{\ell} = \inf A \in A$, $\bar{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\bar{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo**.

[redacted]

O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ *será ilimitado sempre que* $x \neq 0$.

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Como $x > 0$, da definição de sup, deve existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - x < mx$ e $L = \sup A < (m+1)x$, o que é uma contradição.
A prova do caso $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. $\square$

[redacted]

Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional. Entre dois números reais distintos também existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a<b$ e $\epsilon=b-a>0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

[redacted]

Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

[redacted]

$$\textit{Se } A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \textit{ então } \inf A = 0.$$

[redacted]

(a) *Seja* $A = (0, 1]$. *Então* $0 = \inf A$ *e* $1 = \max A$.

(b) $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ *é um corte.*

(c) *Seja* $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. *Então* $\sqrt{2} = \sup C$ *e* $-\sqrt{2} = \inf C$. *Note que* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *não pertencem a* C.

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

[redacted]

Se $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ *for limitado inferiormente (superiormente), então* $-A = \{-x : x \in A\}$ *será limitado superiormente (inferiormente) e* $\inf A = -\sup(-A)$ $(\sup A = -\inf(-A))$.

[redacted]

Todo $A \neq \varnothing$ *e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

[redacted]

Todo subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

[redacted]

Uma **vizinhança** *de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

[redacted]

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\ a + \delta)$ é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ que será chamada $\delta-$vizinhança de a.

[redacted]

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo $\delta > 0$, existir $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, então b será dito um **ponto de acumulação** *de A.*

[redacted]

(a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então* B *não tem pontos de acumulação.*

(c) *Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação.*

d) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

[redacted]

Seja $B \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $b \in B$ *será dito um* **ponto isolado** *de* B, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de* B *distintos de* b.

[redacted]

(a) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. *Então o conjunto dos pontos de acumulação de* B *é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de* B *é o próprio conjunto* B.

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

[redacted]

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -a_0 = L$, $b_n - a_n = 2L/2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j]$, $j \leq n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n]$, $j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leq b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leq b_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leq a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n]$ $\subset (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A. $\square$

Seqüências

[redacted]

Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

[redacted]

A seqüência $\{a_n\}$ *é dita* **convergente com limite** $\boldsymbol{\ell}$ *se para cada* $\varepsilon > 0$ *dado,* $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$ *.*

Notação: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ ou $a_n \to \ell$ ou $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

[redacted]

Uma seqüência $\{a_n\}$ *será* **divergente** *quando ela* **não** *for convergente.*

(I) **Seqüência divergente para $+\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $+\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \to a_n > K$.

(II) **Seqüência divergente para $-\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $-\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \to a_n < -K$.

(III) **Seqüência oscilante**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita oscilante quando diverge, mas não diverge para $+\infty$ e nem para $-\infty$.

Operações com Seqüências

Assim, dadas duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e um número real c, definimos:

- $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- e se $b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais.

- *a) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow$ toda vizinhança de a contém todos exceto possivelmente um número finito dos a_n's.*
- *b) O limite é único.*
- *c) $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ limitada (não vale a volta).*
- *d) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $\forall n \geq N$.*
- *e) Se $A \subset \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma seqüência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a.*

[redacted]

Seja $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *então*

- *a)* $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$.
- *b)* $c.a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c.a$
- *c)* $a_n.b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.b$.
- *d) Se* $b \neq 0$ *e* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_n/b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a/b$.

Subseqüências e Seqüências de Cauchy

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{b_n\}$ é uma subseqüência de $\{a_n\}$ se existir uma função estritamente crescente $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_k = a_{s(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$ existir um número natural $N = N(\epsilon)$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ sempre que $n, m \geqslant N$.

Propriedades

[redacted]

- *a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).*
- *b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.*
- *c) Toda seqüência limitada tem subseqüência convergente.*
- *d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.*
- *e) Toda seqüência de Cauchy que tem uma subseqüência convergente é convergente.*
- *f) Toda seqüência de Cauchy de números reais é convergente.*
- *g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.*
- *h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.*

Exemplo

Se $\mathbb{R} \ni a \geqslant 0$ mostre que a seqüência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leqslant a \leqslant 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Se $a > 1$, $a = 1 + h$ com $h > 0$. Logo

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k > 1 + nh.$$

Da propriedade Arquimediana da reta, a seqüência $\{a^n\}$ é ilimitada e portanto divergente.

Se $0 \leqslant a < 1$ $\{a^n\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 0. Segue de h) que $\{a^n\}$ é convergente com limite $\ell \in [0, 1)$. Ainda $a^{2n} = a^n \cdot a^n$. Logo, de a) e das propriedade do produto de seqüências convergentes $\ell = \ell^2$. Segue que $\ell = 0$.

Exemplo

Mostre que, se $a \neq 1$, $1 + a + a^2 + \cdots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ e que a seqüência $\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\}$ é convergente se $0 \leqslant a < 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Note que , se $s_n = +a + a^2 + \cdots a^n$, $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$ e $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, sempre que $a \neq 1$. O resultado agora segue do exemplo anterior.

Exemplo

Mostre que, a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é convergente.

De fato: É claro que $\{a_n\}$ é crescente e que $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, para $n \geqslant 2$. Logo $a_n \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$. Segue que $\{a_n\}$ é convergente. Denotaremos o seu limite por e.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ é convergente.

De fato: Note que $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k}$ ou seja

$$b_n = 1 + \binom{n}{1} n^{-1} + \overbrace{\binom{n}{2}}^{=\frac{n(n-1)}{2!}} n^{-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^{-n+1} + \overbrace{\binom{n}{n} n^{-n}}^{=\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!n^n}}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots\underbrace{(1-\frac{n-1}{n})}_{=n^{-1}}$$

$$\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = a_n < e$$

Como cada termo da soma que define b_n é crescente, b_n é crescente.
Segue que $\{b_n\}$ é convergente com limite $\ell = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant e$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{a^{\frac{1}{n}}\}$, com $a > 0$, é convergente.

De fato: Recorde que $a^{\frac{1}{n}}$ é o único número real positivo x tal que $x^n = a$. Logo se $x = a^{\frac{1}{n}}$ e $y = a^{\frac{1}{n+1}}$ temos $x^{n+1} = y^{n+1} \cdot x$ e portanto,

- Se $0 < a < 1$, então $x < 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1$ e $x < y$.
- Se $a > 1$, então $x > 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1$ e $x > y$.

Logo, se $a < 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é crescente e limitada superiormente por 1 portanto convergente e, se $a > 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Em qualquer dos casos é convergente com limite $\ell > 0$. Note que $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$ e, de a) e das propriedades do quociente de seqüências, $\ell = 1$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{c_n\}$ com $c_0 = 1$ e $c_n = n^{\frac{1}{n}}$, $n \geqslant 1$, é convergente.

De fato: Recorde que, para $n \geqslant 3$, $n > b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Logo, para $n \geqslant 3$, $n^{n+1} > (n+1)^n$ e, consequentemente, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$.

Isto mostra que $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Segue de h) que $\{c_n\}$ é convergente com limite $\ell \geqslant 1$. Ainda $(2n)^{\frac{1}{2n}}(2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$ e portanto, de a) e do exemplo anterior, $\ell^2 = \ell$ e $\ell = 1$.

[redacted]

Se $\{a_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é infinitésima, então $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitésima.

Exemplo

Mostre que $\left\{\frac{n+\cos n}{n+1}\right\}$ é convergente.

Comparação e Confronto

[redacted]

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n$, então $a \leqslant b$.

[redacted]

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, então $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemplo.

$$e := \lim_{n\to\infty} \overbrace{(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

De fato: Como $a_n \geqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do Teorema (Comparação), $e \geqslant \ell$. Por outro lodo, se $n \geqslant p \geqslant 2$,

$$b_n \geqslant 1+1+\frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{p-1}{n})$$

do Teorema (Comparação) $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant a_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Segue que $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = e$. Isto mostra que $\ell = e$.

Limite Superior e Limite Inferior

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a seqüência $\{a_n\}$ possui uma subseqüência convergente com limite a.

Já vimos que o conjunto dos valores de aderência de uma seqüência limitada é não vazio.

Vimos também que se a é um ponto de acumulação do conjunto $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos valores da seqüência $\{a_n\}$ então a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada. Definimos o limite superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (limite inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) da seqüência $\{a_n\}$ por

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} a_k$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} a_k$$

Também escreveremos $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ou $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ para denotar o limite inferior e o limite superior.

[redacted]

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada, então $a = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ e $b = \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$.

Segue to Teorema (Comparação) que

[redacted]

Se a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$ então

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to\infty}.$$

Além disso, uma seqüência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty}$.

Segue to Teorema (Confronto) que

[redacted]

Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se e, somente se,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} .$$

Seqüências divergentes para $+\infty$ ou $-\infty$.

Recorde que

[redacted]

Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ diverge para $+\infty$ $(-\infty)$ se, dado $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant M$ $(a_n \leqslant -M)$ para todo $n \geqslant N$. Escreveremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ ou $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty(-\infty)$.

Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ é eventualmente positiva (negativa) se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ $(a_n < 0)$, para todo $n \geqslant N$.

[redacted]

a) *Se* $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\{b_n\}$ *é limitada inferiormente, então* $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

b) *Se* $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_m = +\infty$.

c) *Seja* $\{a_n\}$ *uma seqüência com* $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ *é eventualmente positiva e* $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *se, e somente se,* $\dfrac{1}{a_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

d) *Sejam* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *são eventualmente positivas,* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- d_1) *Se* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ *e* $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.
- d_2) *Se* $\{a_n\}$ *é limitada e* $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *, então* $\dfrac{a_n}{b_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Se $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ nada podemos afirmar de $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Neste caso tudo pode ocorrer, $\{a_n + b_n\}$ pode convergir para qualquer número real, pode divergir para $+\infty$ or $-\infty$ ou pode oscilar.

[redacted]

Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{a^n}{n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta ver que $a = 1 + h$ com $h > 0$ e escrever

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1}{n} + h + (n-1)\frac{h^2}{2!} + s_n.$$

O resultado segue aplicando a).

[redacted]

Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{n!}{a^n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta escolher n_0 tal que $\frac{n_0}{a} > 2$ e escrever, para $n \geqslant n_0$, $a_n = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!} \frac{1}{a^{n-n_0}}$. Se $r = \frac{n_0!}{a^{n_0}}$ temos que

$$a_n = r\frac{n(n-1)\cdots(n_0+1)}{a^{n-n_0}} = r2^{n-n_0} + s_n = r(n+1-n_0) + \tilde{s}_n.$$

O resultado segue aplicando a).

Séries

[redacted]

- *Considere* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Prove que* $\{s_n\} \to \infty$.

Resolução: Como $\{s_n\}$ é crescente, basta mostrar que é ilimitada:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2},\ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \cdot \frac{1}{8}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Pode-se mostrar, por indução, que $s_{2^k} > (k+2) \cdot \frac{1}{2}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Assim $\{s_n\}$ não é limitada superiormente, portanto: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Consideremos a seqüência $\{a_n\}$.
A partir da seqüência $\{a_n\}$ vamos construir a seqüência $\{s_n\}$ (das somas parciais) dada por:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

[redacted]

A seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais é chamada série associada à seqüência $\{a_n\}$. Cada s_n é chamado **soma parcial ou reduzida de ordem n** *. Os termos a_n são chamados os* **termos da série** *.*

[redacted]

A série $\sum a_n$ *é dita* **convergente** *se a seqüência* $\{s_n\}$ *é convergente. Caso contrário a série é dita* **divergente**.

Se a seqüência $\{s_n\}$ é convergente para $\mathbf{S}$ dizemos que a série $\sum_1^\infty a_n$ é **convergente com soma** $\mathbf{S}$ e escrevemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{S}$.

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathbf{S}.$$

[redacted]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

- $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.
- $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} 2^n$ diverge.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge - **Série Harmônica**.

A **Série Geométrica** $\sum_{n\geqslant 1} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots \quad (a \neq 0)$ é convergente se, e só se, $|r| < 1$, caso em que sua soma é $\dfrac{a}{1-r}$.
Assim

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots = \frac{a}{1-r},\ |r| < 1$$

onde r é dito **razão** de Série Geométrica.

[redacted]

Se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. A recíproca é falsa.

Prova: Note que, se $\{s_n\}$ com $s_n = a_1 + \cdots + s_n$ é convergente, temos

$$a_n = s_n - s_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s - s = 0.$$

Para ver que não vale a volta considere a série harmônica.

[redacted]

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente se, e só se, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente.

[redacted]

Se $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum a_n$ é uma série convergente se, e somente se, a seqüência das somas parciais é limitada.

[redacted]

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leqslant c \cdot b_n$, para todo $n \geqslant n_0$, então

- *Se $\sum b_n$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.*
- *Se $\sum a_n$ é divergente, então $\sum b_n$ é divergente.*

[redacted]

Se $r > 1$, $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente.

Solução: Simplesmente note que

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\underbrace{\frac{1}{(2^n - 2^{n-1})^r}}_{=2^{(n-1)r}} + \cdots + \frac{1}{(2^n-2)^r} + \frac{1}{(2^n-1)^r}\right) \\
&< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{4^{r-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)(r-1)}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{r-1}}}
\end{aligned}$$

Segue do fato que uma seqüência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy que o seguinte resultado vale.

[redacted]

$\sum a_n$ é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n \geqslant N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$.

[redacted]

Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é convergente.

Segue facilmente do critério de Cauchy que

[redacted]

Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Não vale a volta.

[redacted]

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ então $\sum a_n$ é divergente. Se $c = 1$ nada podemos concluir.

De fato: A primeira parte já foi provada anteriormente. Vamos mostrar que, se $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, então $\sum a_n$ é divergente. Isto segue do fato que existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{|a_{\phi(n)}|^{\frac{1}{\phi(n)}}\}$ converge para $c > 1$ e portanto $\{|a_{\phi(n)}|\}$ não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando $c = 1$ tome as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$. $\square$

[redacted]

Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geqslant 1$.

Solução: Basta ver que $\overline{\lim} \, |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente quando $|a| \geqslant 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.

[redacted]

Se $\sum b_n$ é uma série convergente de termos positivos e $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos tais que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \ \forall n \geqslant n_0,$$

então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Em particular, se $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geqslant 1$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série é divergente.

De fato:

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \ \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \ \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leqslant \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \ \cdots$$

Logo $\frac{|a_{n_0+p}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}$ e o resultado segue utilizando o Teorema da Comparação.

O caso particular segue tomando $b_n = c^n$.

Para o restante da prova usamos o fato que a seqüência dos termos não converge para zero.$\square$

[redacted]

$\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ é convergente para $|a| < e$.

De fato: Note que, para $a \neq 0$, $\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} a^{(n+1)}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n} a^n\right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}|a| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{e}$.
O resultado agora segue do Teste da Razão.

[redacted]

Considere a série $\{a_n\}$ com $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ e $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Note que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O teste da raiz indica convergência enquanto que o teste da razão não se aplica.

[redacted]

Considere a série $\sum a_n$ *com* $a_{2n} = 2a^{2n-1}$ *e* $a_{2n-1} = a^{2(n-1)}$.

Vamos aplicar o critério da raiz e o critério da razão para esta série.

- Se $n = 2k$, $\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \frac{|a^{2k}|}{2|a^{2k-1}|} = \frac{|a|}{2}$.
- Se $n = 2k-1$, $\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k-1}|} = \frac{2|a^{2k-1}|}{|a^{2(k-1)}|} = 2|a|$.

Segue que $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$. Por outro lado $\sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$.

Desta forma, o teste da Raiz nos dá convergência para $|a| < 1$ e o teste da razão nos dá convergência apenas para $|a| < \frac{1}{2}$.

Isto sugere que o Teste da Raiz é mais eficaz que o Teste da Razão.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Então

$$\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Se existe o limite $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ então o limite $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ também existe e ambos têm o mesmo valor.

[redacted]

$$\lim \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

[redacted]

Seja $\sum a_n$ uma série (não necessariamente convergente) e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ as suas somas parciais. Se $\{s_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então $\sum a_n b_n$ é convergente.

De fato: Segue facilmente por indução que, se $s_n = a_1 + \cdots + a_n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n\end{aligned}$$

Seja $M = \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\sum(b_n - b_{n+1})$ é uma série convergente de números reais não negativos e $s_n b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos que

$$|s_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M(b_k - b_{k+1}),$$

segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ é convergente e que $\sum a_n b_n$ é convergente. $\square$

[redacted]

Para cada número real x que não é múltiplo inteiro de 2π, as séries $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ e $\sum \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ são convergentes.

Solução: Para ver que $\{\sum_{k=1}^{n} \cos(nx)\}$ (ou $\{\sum_{k=1}^{n} \cos(nx)\}$) é limitada utilizamos que (já que $e^{ix} \neq 1$)

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

e tomamos parte real e parte imaginária. O resultado agora segue do Teorema (Dirichlet).

[redacted]

Seja $\sum a_n$ uma série convergente e $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente de números positivos (não precisa ser infinitésima) então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.

De fato: Seja $c = \lim b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Note que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - c) + c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Do Teorema (Dirichlet), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - c)$ é convergente com soma s.

Logo $\sum a_n b_n = s + c \sum a_n$. $\square$

[redacted]

Seja $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente e infinitésima. Então a série $\sum(-1)^n b_n$ é convergente.

De fato: É fácil ver que, se $a_n = (-1)^n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, então $\{s_n\}$ é limitada (embora não seja convergente). Segue do Teorema (Dirichlet) que $\sum(-1)^n b_n$ é convergente.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência não-crescente de números reais não negativos. A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum 2^k a_{2^k}$ é convergente.

De fato: Sejam $\{s_n\}$ e $\{\tilde{s}_n\}$ são as seqüências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum 2^k a_{2^k}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ \leqslant\ & s_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \\ \leqslant\ & \tilde{s}_{n-1} \leqslant \tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada segue que $\{s_n\}$ é limitada.

Agora note que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \\ &\geqslant \frac{a_1}{2} + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geqslant \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2}\tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se $\{s_n\}$ é limitada segue que $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada. $\square$

[redacted]

Do resultado anterior, a série $\sum \frac{1}{n^p}$ *é convergente se, e somente se a série* $\sum \frac{2^n}{2^{np}} = \sum 2^{(1-p)n}$ *é convergente se, e somente se,* $p > 1$.

[redacted]

A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ *é convergente se, e somente se* $p > 1$.

De fato: Do resultado anterior, basta notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2) n^p}$$

é convergente se e somente se $p > 1$.

Séries de Potência

Dada uma seqüência $\{a_n\}$ de números reais, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada uma série de potências. Os números a_n são chamados de coeficientes da série e x é um número real.

Dependendo da escolha de x a série pode convergir ou divergir. Vamos tentar determinar o maior conjunto de valores de x para o qual a série de potências é convergente.

[redacted]

Dada a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *seja* $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Defina*

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty,$$
$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty \text{ e },$$
$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0$$

Então, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge se* $|x| < R$, *diverge se* $|x| > R$ *e nada podemos afirmar de* $|x| = R$.

De fato: Basta notar que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\alpha$ e aplicar o teste da raiz.

[redacted]

Vamos analisar a convergência das séries de potências

- $\sum n^n x^n$, $R = 0$.
- $\sum \dfrac{n^n}{n!} x^n$, $R = e^{-1}$.
- $\sum \dfrac{x^n}{n!}$, $R = \infty$.
- $\sum x^n$, $R = 1$.
- $\sum \dfrac{x^n}{n^p}$, $p > 0$, $R = 1$.

Séries rearranjadas

Seja $\sum a_n$ uma série. Defina as seqüências

- $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leqslant 0$.
- $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geqslant 0$.

As seqüências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ serão chamadas de parte positiva e parte negativa de $\{a_n\}$. Sendo assim $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n + 2a_n^-$.

Note que, se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. Reciprocamente, se $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Além disso, se $\sum a_n$ é convergente mas não é absolutamente convergente, segue facilmente das relações acima que ambas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

[redacted]

Seja $\{a_n\}$ a seqüência dos termos da série $\sum a_n$, $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. A série $\sum b_n$ é chamada uma série rearranjada de $\sum a_n$.

[redacted]

Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.

[redacted]

Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente, então

- *Dado $c \in \mathbb{R}$, existe bijeção $\xi_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_c(n)} = c$.*
- *Existem bijeções ξ_+ e ξ_- tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$ diverge para $+\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$ diverge para $-\infty$*