

Continuidade: Resultados Fundamentais

Aula 15

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

24 de Abril de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Recorde que:

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ é contínua em p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se p é um ponto de acumulação de D_f , f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.

Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.

Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

A prova do teorema a seguir segue da definição de continuidade e da caracterização de limites por seqüências.

Teorema

Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Corolário

Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ temos $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$.

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ ($f(\bar{x}) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

De fato: Como f é contínua em \bar{x} , dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado. \square

O Teorema Anulamento

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$, então, existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\emptyset \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$. \square

O Teorema do Valor Intermediário

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$). Se $f(a) < k < f(b)$ ($f(a) > k > f(b)$), então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$.
Portanto $f(\bar{x}) = k$. \square

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r , existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b] = B \Rightarrow |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall x \in [a, b]$. Se f não é constante, m é ponto de acumulação de $\{y \in \text{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p .

Como f é contínua em p , para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a, b], |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \frac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluimos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \text{Im}(-f) = \sup \text{Im}(f)$. \square

Como uma consequência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

então

$$Im(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- 1) Um ponto $a \in A$ é interior a A se existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset A$.
- 2) O conjunto A é aberto se todos os seus pontos são interiores.
- 3) O conjunto A é fechado em \mathbb{R} se seu complementar é aberto.
- 4) O interior A° de A é o conjunto dos pontos interiores a A .
- 5) O fecho \bar{A} de A é a interseção de todos os fechados que contém A .

Teorema

Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos.

- 1) Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.
- 2) Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.
- 3) Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.
- 4) Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.

Exemplo

Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b) . O interior A° de A é o maior aberto contido em A . O fecho de A é o menor fechado que contém A .

Teorema

Todo subconjunto aberto A de \mathbb{R} se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ , $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ e $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.

se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x . Segue que

- 1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
- 2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \emptyset$ e
- 3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x . \square

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um desses conjuntos é vazio.