Limites Superior e Inferior - Continuidade
Aula 14

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

19 de Abril de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Limite Superior e Limite Inferior

Seja D um subconjunto $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D. Suponha que exista um $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\overline{\lim_{x \to p}} f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escrevemos $\overline{\lim\limits_{x \to p}} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p.

Semelhantemente, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} > -\infty,$$

definimos (podendo ser $+\infty$)

$$\varliminf_{x\to p} f(x) := \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}$$

Escreveremos $\varliminf_{x\to p} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p.

Valor de Aderência

Definição

Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ *é um valor de aderência de* f *no ponto* p *se existe seqüência* $\{x_n\}$ *em* $D \backslash \{p\}$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D.

1) *Se* ℓ *é um valor de aderência de* f *em* p, $\varliminf_{x \to p} f(x) \leqslant \ell \leqslant \varlimsup_{x \to p} f(x)$.

2) *Se* f *é limitada em uma vizinhança de* p *então* $\varlimsup_{x \to p} f(x)$ *e* $\varliminf_{x \to p} f(x)$ *são valores de aderência de* f.

3) $\lim_{x \to p} f(x)$ *existe se, e somente se,* f *é limitada em uma vizinhança de* p *e o conjunto dos valores de aderência de* f *em* p *é unitário.*

4) *Se* f *é limitada em uma vizihança de* p, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\varliminf f(x) - \epsilon < f(x) < \varlimsup f(x) + \epsilon$ *para todo* $x \in D$ *com* $0 < |x - p| < \delta$.

Prova de 1): Se $\underline{\lim}_{x\to p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x\to p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$
$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall\ 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Escolha $\delta_0 < \delta_\epsilon$. Se ℓ é um valor de aderência de f em p, existe $x_n \in D\backslash\{p\}$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, com $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta_0$, $\forall n \geqslant N$. Logo, $\forall n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon < &\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \\ &\leqslant f(x_n) \leqslant \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < L + \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que $l - \epsilon \leqslant \ell \leqslant L + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e portanto $l \leqslant \ell \leqslant L$. $\square$

Prova de 2): Note que, para algum $\delta_0 > 0$ temos que

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

$$(0,\delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} \text{ é não-decrescente e}$$
$$(0,\delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} \text{ é não-crescente,}$$

existem os limites

$$\lim_{\delta \to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = l \text{ e}$$
$$\lim_{\delta \to 0^+} sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = L$$

Como p é um ponto de acumulação de D seja $\{x_n^l\}$ e $\{x_n^L\}$ seqüências em D tais que $0<\max\{|x_n^l-p|,|x_n^L-p|\}<\frac{\delta_0}{n}$ e

$$\inf\{f(x):x\in D, 0<|x-p|<\frac{\delta_0}{n}\}\leqslant f(x_n^l)\leqslant \inf\{f(x):x\in D, 0<|x-p|<\frac{\delta_0}{n}\}+\frac{1}{n}$$
$$\sup\{f(x):x\in D, 0<|x-p|<\frac{\delta_0}{n}\}-\frac{1}{n}\leqslant f(x_n^L)\leqslant \inf\{f(x):x\in D, 0<|x-p|<\frac{\delta_0}{n}\}$$

O resultado agora segue tomando o limite nas espressões acima. $\square$

Prova de 3): Se o limite existe então f é limitada em uma vizinhança de p e todos os valores de aderência coincidem e em particular o $\overline{\lim_{x\to p}} f(x) = \underline{\lim_{x\to p}} f(x)$. Por outro lado, se f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência é unitário $\overline{\lim_{x\to p}} f(x) = \underline{\lim_{x\to p}} f(x)$ e todos os valores de aderência coincidem. Disto segue que o limite existe.

Prova de 4): Se $\underline{\lim}_{x\to p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x\to p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < l + \epsilon$$
$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall\ 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Segue que, para $\delta < \delta_\epsilon$ e $x \in D$, $0 < |x-p| < \delta$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} &\leqslant f(x) \\ \leqslant \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} &< L + \epsilon. \square \end{aligned}$$

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ **é contínua em** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \,.$$

Observação

Note que,

se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e

se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p.

Exemplo

(a) *A função* $f(x) = k$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(b) *A função* $f(x) = x$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(c) *A função* $f(x) = x + 1$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(d) *A função* $f(x) = x^2$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(e) *A função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & se\ x \neq 1 \\ 0 & se\ x = 1 \end{cases}$ *não é contínua em* $x = 1$ *pois* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

Propriedades do Limite

Recordemos as propriedades do limite.
Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x \to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x \to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) + \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x \to p} \; k \; f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Propriedades da Continuidade

Corolário

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ *e* 2, *funções. Suponha que* $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ *e que* f *e* g *sejam contínuas em* p. *Então* $f_1 + f_2$, $k \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_2$ *e, se* $f_2(p) \neq 0$, f_1/f_2 *são contínuas em* p.

Teorema (Limite da Composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ *e* $L \in D_f$*. Se* p *é um ponto de acumulação de* D_g*,* $\lim_{x\to p} g(x) = L$ *e* f *é contínua em* L *, então*

$$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \;\Rightarrow\; |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x\to p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f\circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f\circ g}, 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{x\to p} f(g(x)) = f(L)$. $\square$

Recorde que:

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se,* *dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \quad e \quad |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.

Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.

Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

De fato: Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f,\ x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x})-\epsilon, f(\bar{x})+\epsilon)) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado.$\square$

O Teorema Anulamento

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$, *então, existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\varnothing \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim\limits_{x \to z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$. $\square$

O Teorema do Valor Intermediário

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. Se $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$. $\square$