

Limites: Definição e Propriedades - Aula 13

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

17 de Abril de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Limites de Funções

Definição (Limite)

Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Diremos que **o limite de $f(x)$ quando x tende p é L** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\}) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Note que:

- Se não existe um número real L tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ diremos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e mesmo que pertença o valor de f em p não é importante para a definição acima.
- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite de $f(x)$ quando x tende a p , caso exista, é único. Este limite será denotado por

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \epsilon \text{ e } |f(x) - L'| < \epsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$. \square

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado.

Dada a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dado $D' \subset D$ denotaremos por $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f|_{D'}(x) = f(x)$, para $x \in D'$.

Nos referiremos a $f|_{D'}$ como a restrição de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a D' .

Segue imediatamente da definição que

Teorema (1)

Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D' . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = L$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, D' e D'' subconjuntos de D e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D' e de D'' .

• Se

- um dos limites $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ não existe ou
- ambos existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) \neq \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$

então o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.

- Se $(D' \cup D'') \setminus \{p\} = D \setminus \{p\}$, o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$.

Prova: A prova da primeira parte segue diretamente de (1). Para a segunda parte, existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D'}(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D'', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D''}(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x). \square$$

Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ ($D_p^- = D \cap (-\infty, p)$).

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D . O **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^+}(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D . Então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p , isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

De fato: Existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$.
Logo

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L| = M, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema (Confronto)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > \delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Logo

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta.$$

Segue que $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, $\forall x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Ou ainda

$$|g(x) - L| < \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema (Conservação do Sinal)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.

De fato: Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. \square

Teorema (Comparação)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e existem $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_f$ então $L_f \leq L_g$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$

$$L_f - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $L_f - L_g \leq \epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. \square

Teorema (Limite por seqüências)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p .

De fato: Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é seqüência em $D \setminus \{p\}$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Logo $|f(x_n) - L| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Isto mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. \square

Para a recíproca primeiramente note que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p todas as seqüência $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite pois se duas tais seqüências tem imagens pela f com limites distintos, alternando os seus elementos contruímos uma seqüência $\{\tilde{x}_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p e tal que $\{f(\tilde{x}_n)\}$ não converge.

Agora, se $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não é L , existe $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in D$, $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ não é L . \square

Propriedades do Limite

Sejam $f_i: D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1$ e 2 , funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1 \text{ onde } k = \text{constante.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i}, 0 < |x - p| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2}, i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$$

$$|(f_1 + f_2)(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1$ onde $k = \text{constante}$

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |k f_1(x) - k L_1| = |k| |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (k f_1)(x) = k L_1$.

Prova de 3): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1 \right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1 \right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
 |(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
 &\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
 &\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)} (|L_2| + 1) + |L_1| \frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)} \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4):
$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se } L_2 \neq 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon |L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min \left\{ \frac{\epsilon |L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}, \frac{|L_2|}{2} \right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \quad \text{e} \quad \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)| |L_2|} \\ &\leq \frac{|f_1(x) - L_1| |L_2| + |L_2 - f_2(x)| |L_1|}{|L_2| |L_2|/2} \\ &\leq 2 \frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2 |L_2 - f_2(x)| \frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\ &\leq 2 \frac{\epsilon |L_2|}{4} \frac{1}{|L_2|} + 2 \frac{\epsilon |L_2|^2}{4(|L_1| + 1)} \frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Teorema (Critério de Cauchy)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . O $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p , isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e $0 < |y - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

De fato: É claro que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é de Cauchy em p . Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma seqüência em $D \setminus \{p\}$ que converge para p , $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente. \square

Limites no infinito

Seja D um subconjunto **ilimitado superiormente** de \mathbb{R} e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para **infinito** é $L \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que

$$x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

De modo análogo, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite infinito. Neste caso $D = \mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Limites infinitos

Seja D um subconjunto \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D diremos que $f(x)$ **diverge** para $+\infty$ quando x tende para p se, dado $M > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo definimos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty.$$

Se D é ilimitado superiormente (inferiormente) definimos também

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \right).$$