# Séries de Números Reais - Aula 12

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

14 de Abril de 2023

**Primeiro Semestre de 2023**

### Teorema

*Seja $\{a_n\}$ uma seqüência não-crescente de números reais não negativos. A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum 2^k a_{2^k}$ é convergente.*

**De fato:** Sejam $\{s_n\}$ e $\{\tilde{s}_n\}$ são as seqüências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum 2^k a_{2^k}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
& s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
\leqslant\, & s_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \\
\leqslant\, & \tilde{s}_{n-1} \leqslant \tilde{s}_n.
\end{aligned}
$$

Logo, se $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada segue que $\{s_n\}$ é limitada.

Agora note que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \\
&\geqslant \frac{a_1}{2} + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\
&\geqslant \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} \tilde{s}_n.
\end{aligned}$$

Logo, se $\{s_n\}$ é limitada segue que $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada. $\square$

## Exemplo

*Do resultado anterior, a série* $\sum \frac{1}{n^p}$ *é convergente se, e somente se a série* $\sum \frac{2^n}{2^{np}} = \sum 2^{(1-p)n}$ *é convergente se, e somente se,* $p > 1$.

## Exemplo

*A série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ *é convergente se, e somente se* $p > 1$.

**De fato:** Do resultado anterior, basta notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)n^p}$$

é convergente se e somente se $p > 1$.

# O número $e$ é iracional

## Exemplo

$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é iracional.*

**De fato:** Seja $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3 + \cdots}] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Agora, suponha que existem inteiros positivos $p$ e $q$ tais que $e = \frac{p}{q}$. Segue que

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Por hipótese $q!e$ é ium nteiro e como $q!s_q$ também é inteiro segue que $q!(e - s_q)$ é inteiro em $(0, 1)$ e temos uma contradição.

## Exemplo

*Considere a série* $\{a_n\}$ *com* $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ *e* $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Note que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{e} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O teste da raiz indica convergência enquanto que o teste da razão não se aplica.

## Teorema (Teste da Raiz - Revisitado)

*Se* $\{a_n\}$ *é uma seqüência limitada e* $\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Se* $\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ *então* $\sum a_n$ *é divergente. Se* $c = 1$ *nada podemos concluir.*

**De fato:** A primeira parte já foi provada anteriormente. Vamos mostrar que, se $\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, então $\sum a_n$ é divergente. Isto segue do fato que existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{|a_{\phi(n)}|^{\frac{1}{\phi(n)}}\}$ converge para $c > 1$ e portanto $\{|a_{\phi(n)}|\}$ não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando $c = 1$ tome as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$.

## Teorema (Teste da Razão - Revisitado)

*Se $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos e $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

*Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geqslant 1$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série é divergente.*

# Séries de Potência

Dada uma seqüência $\{a_n\}$ de números reais, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada uma série de potências. Os números $a_n$ são chamados de coeficientes da série e $x$ é um número real.

Dependendo da escolha de $x$ a série pode convergir ou divergir. Vamos tentar determinar o maior conjunto de valores de $x$ para o qual a série de potências é convergente.

## Teorema

*Dada a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *seja* $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Defina*

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty,$$
$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty \text{ e },$$
$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0$$

*Então,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge se* $|x| < R$, *diverge se* $|x| > R$ *e nada podemos afirmar de* $|x| = R$.

**De fato:** Basta notar que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\alpha$ e aplicar o teste da raiz.

## Exemplo

*Vamos analisar a convergência das séries de potências*

- $\sum n^n x^n, \; R = 0.$
- $\sum \dfrac{n^n}{n!} x^n, \; R = e^{-1}.$
- $\sum \dfrac{x^n}{n!}, \; R = \infty.$
- $\sum x^n, \; R = 1.$
- $\sum \dfrac{x^n}{n^p}, \; p > 0, \; R = 1.$

## Séries rearranjadas

Seja $\sum a_n$ uma série. Defina as seqüências

- $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leqslant 0$.
- $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geqslant 0$.

As seqüências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ serão chamadas de parte positiva e parte negativa de $\{a_n\}$. Sendo assim $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n + 2a_n^-$.

Note que, se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. Reciprocamente, se $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Além disso, se $\sum a_n$ é convergente mas não é absolutamente convergente, segue facilmente das relações acima que ambas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

Seja $\{a_n\}$ a seqüência dos termos da série $\sum a_n$, $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. A série $\sum b_n$ é chamada uma série rearranjada de $\sum a_n$.

## Exemplo

*Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mostramos que esta série é convergente. Se $s$ é a sua soma ($s = \log 2$), temos*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$\frac{3s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

*Logo uma série rearranjada pode ter soma distinta da série original. Isto não ocorre se a série for absolutamente convergente.*

## Teorema

*Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.*

**De fato:** Se $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$, dado $n \in \mathbb{N}$ seja $m_n = \max\{\xi(1), \cdots, \xi(n)\}$, então

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e $\sum b_n$ é convergente com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{N}$ seja $n_m = \max\{\xi^{-1}(1), \cdots, \xi^{-1}(m)\}$. Sendo assim

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n_m} b_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_k$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Isto mostra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Para o caso geral note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \square$$

## Teorema

*Se* $\sum a_n$ *é convergente e não é absolutamente convergente, então*

- *Dado* $c \in \mathbb{R}$, *existe bijeção* $\xi_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_c(n)} = c$.
- *Existem bijeções* $\xi_+$ *e* $\xi_-$ *tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$ *diverge para* $+\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$ *diverge para* $-\infty$

**De fato:** Seja $\{p_n\}$ a seqüência dos termos positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem e $\{q_n\}$ a seqüência dos termos não positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem. Sabemos que $\sum p_n$ e $\sum q_n$ divergem e que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dado $c \in \mathbb{R}$ seja $n_1$ o primeiro inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c.$$

Em seguida escolha $m_1$ o nenor inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{m_1} q_n < c$$

e prossiga com este processo.

Desta forma, para todo $k > 1$,

$$0 < \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j$$

$$+ \cdots + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} p_j - c \leqslant p_{n_k+1} \quad \text{e}$$

$$0 > \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j$$

$$+ \cdots + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} p_j + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j - c \geqslant q_{m_k}.$$

Agora, como $q_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ o resultado segue desta reordenação. Um processo semelhante prova a segunda parte do resultado.$\square$

# Seqüência dupla

Uma seqüência dupla $(x_{nk})$ é uma função $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada par $(n, k)$ de números naturais um número real $x_{nk}$.

$$
\begin{array}{cccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\
\multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}
$$

Consideremos as somas repetidas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right)$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$.
Mesmo quando 'convergem', elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots & \to & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots & &
\end{array}
$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

## Lema

*Se* $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(j) = x_{n1} + \ldots + x_{nj}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente em* $\mathbb{N}$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ *converge*, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$$

**Prova:** Segue do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{j\to\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} x_{nk}\right]$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{j}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \square$$

## Teorema (A)

*Dada $\{x_{nk}\}$, se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$ para cada $n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right).$$

*Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.*

**Prova:** Pondo $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leqslant a_n$ para todo $k$ e todo $n$. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em $k \in \mathbb{N}$ pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado.$\square$

A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

## Definição

*Dadas as séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *o seu produto de Cauchy é a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *onde* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

## Observação

*Este produto é inspirado no produto de polinômios.*

O produto de séries convergentes pode não ser convergente. Basta considerar a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (exercício).

## Teorema (B)

*Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente com soma* $A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *é convergente com soma* $B$, *então o seu produto de Cauchy* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, *é convergente com soma* $AB$.

**Prova:** Se $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\displaystyle B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\displaystyle C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $B_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ e $\beta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Queremos mostrar que $C_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
&\qquad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots a_{n-1} B_1 + a_n B_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \\
&= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0.
\end{aligned}
$$

Se $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$
Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ sempre que $n \geqslant N$.
Logo, para $n \geq N$,

$$
\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}||a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0| \\
&< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\left(|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|\right) \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.
\end{aligned}
$$

logo $0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha$, para todo $\epsilon > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração.$\square$