Séries de Números Reais - Aula 11

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Abril de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Teorema (Teste da Raiz)

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

De fato: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geqslant n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|a_n| < r^n$ para todo $n \geqslant N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo

Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geqslant 1$.

Solução: Basta ver que $\overline{\lim} \, |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente quando $|a| \geqslant 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.

Teorema (Teste da Razão)

Se $\sum b_n$ é uma série convergente de termos positivos e $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos tais que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \ \forall n \geqslant n_0,$$

então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Em particular, se $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

De fato:

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \ \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \ \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leqslant \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \ \cdots$$

Logo $\frac{|a_{n_0+p}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}$ e o resultado segue utilizando o Teorema da Comparação. O caso particular segue tomando $b_n = c^n$.

Exemplo

$\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ *é convergente para* $|a| < e$.

De fato: Note que, para $a \neq 0$, $\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} a^{(n+1)}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n} a^n\right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} |a| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|a|}{e}$.

O resultado agora segue do Teste da Razão.

Exemplo

Considere a série $\sum a_n$ *com* $a_{2n} = 2a^{2n-1}$ *e* $a_{2n-1} = a^{2(n-1)}$.

Vamos aplicar o critério da raiz e o critério da razão para esta série.

- Se $n=2k$, $\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \frac{|a^{2k}|}{2|a^{2k-1}|} = \frac{|a|}{2}$.
- Se $n=2k-1$, $\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k-1}|} = \frac{2|a^{2k-1}|}{|a^{2(k-1)}|} = 2|a|$.

Segue que $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$. Por outro lado $\sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$.

Desta forma, o teste da Raiz nos dá convergência para $|a| < 1$ enquanto que o teste da razão nos dá convergência apenas para $|a| < \frac{1}{2}$.

Isto indica uma possível melhor eficácia do Teste da Raiz que é provada no resultado a seguir.

Teorema

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Então

$$\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

De fato: Mostremos primeiramente que $\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Se não, seja $c > 0$ com $\overline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c < \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c, \ \forall n \geqslant N.$$

Disto segue que $|a_{N+p}| < |a_N| c^{-N} c^{N+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Sendo assim $c < \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant c$ o que é uma contradição.

Para ver que $\underline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \underline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$ procedemos de modo similar supondo que, para algum $c > 0$ $\underline{\lim}\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c > \underline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c$, $\forall\ n \geqslant N$, e $|a_{N+p}| > |a_N| c^{-N} c^{N+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Logo $c > \underline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \geqslant c$ e temos uma contradição.

Corolário

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Se existe o limite $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *então o limite* $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ *também existe e ambos têm o mesmo valor.*

Exemplo

$$\lim \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

De fato: Seja $a_n = \frac{n^n}{n!}$ e note que $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. Note também que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

O resultado desejado agora segue do corolário acima.

Teorema (Dirichlet)

Seja $\sum a_n$ uma série (não necessariamente convergente) e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ as suas somas parciais. Se $\{s_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então $\sum a_n b_n$ é convergente.

De fato: Segue facilmente por indução que, se $s_n = a_1 + \cdots + a_n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n\end{aligned}$$

Seja $M = \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\sum(b_n - b_{n+1})$ é uma série convergente de números reais não negativos e $s_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos que

$$|s_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M(b_k - b_{k+1}),$$

segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ é convergente e que $\sum a_n b_n$ é convergente. $\square$

Exemplo

Para cada número real x que não é múltiplo inteiro de 2π, as séries $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ e $\sum \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}$ são convergentes.

Solução: Para ver que $\{\sum_{k=1}^{n} \cos(nx)\}$ (ou $\{\sum_{k=1}^{n} \cos(nx)\}$) é limitada utilizamos que (já que $e^{ix} \neq 1$)

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

e tomamos parte real e parte imaginária. O resultado agora segue do Teorema (Dirichlet).

Teorema (Abel)

Seja $\sum a_n$ uma série convergente e $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente de números positivos (não precisa ser infinitésima) então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.

De fato: Seja $c = \lim b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Note que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - c) + c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Do Teorema (Dirichlet), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - c)$ é convergente com soma s.

Logo $\sum a_n b_n = s + c \sum a_n . \square$

Teorema (Leibiniz)

Seja $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente e infinitésima. Então a série $\sum(-1)^n b_n$ é convergente.

De fato: É fácil ver que, se $a_n = (-1)^n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, então $\{s_n\}$ é limitada (embora não seja convergente). Segue do Teorema (Dirichlet) que $\sum(-1)^n b_n$ é convergente.