Séries de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

15 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Exemplo

- *Considere* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Prove que* $\{s_n\} \to \infty$.

Resolução: Como $\{s_n\}$ é crescente, basta mostrar que é ilimitada:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2},\ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \cdot \frac{1}{8}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Pode-se mostrar, por indução, que $s_{2^k} > (k+2) \cdot \frac{1}{2}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Assim $\{s_n\}$ não é limitada superiormente, portanto: $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$.

Consideremos a seqüência $\{a_n\}$.
A partir da seqüência $\{a_n\}$ vamos construir a seqüência $\{s_n\}$ (das somas parciais) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definição

A seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais é chamada série associada à seqüência $\{a_n\}$. Cada s_n é chamado **soma parcial ou reduzida de ordem n** . *Os termos a_n são chamados os* **termos da série** .

Notação:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ .$$

Observação: As vezes consideraremos séries que começam com a_{n_0} em lugar de a_1. Neste caso escreveremos $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_0$, por exemplo.

Exemplos:

$\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$.
Construímos a seqüência das somas parciais (série):

$$s_1 = a_1 = 1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = 0$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\vdots$$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Construímos a seqüência das somas parciais (série):

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{6}{10^n} \right\}.$$

Construímos a seqüência das somas parciais (série):

$s_1 = 0,6$

$s_2 = 0,6 + 0,06 = 0,66$

$s_3 = 0,66 + 0,006 = 0,666$

$\vdots$

Observe que $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$.

Escrevemos

$$\frac{2}{3} = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots .$$

Definição

A série $\sum a_n$ *é dita* **convergente** *se a seqüência* $\{s_n\}$ *é convergente. Caso contrário a série é dita* **divergente**.

Se a seqüência $\{s_n\}$ é convergente para **S** dizemos que a série $\sum_1^\infty a_n$ é **convergente com soma S** .

Claramente podemos definir a soma e multiplicação de séries e das propriedades de seqüências podemos deduzir a convergência da série soma, produto, etc.

Notação: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{S}$.

Portanto, quando escrevemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{S}$ queremos dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathbf{S}.$$

Exemplo (Série Telescópica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Note que,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Assim $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

Aqui $s_n = -1$ para n ímpar e $s_n = 0$ para n par.
Portanto $\{s_n\}$ não converge.

- $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} 2^n$ diverge. Aqui $s_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

$\{s_n\}$ não é limitada e assim não é convergente.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge - **Série Harmônica**. Aqui $s_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

Já vimos anteriormente que $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Algumas séries são importantes pois servem como referência para o estudo de outras. A Série Telescópica, a Série Harmônica são exemplos deste tipo. Outro exemplo seria a **Série Geométrica** que veremos a seguir

A **Série Geométrica** $\sum_{n\geqslant 1} a\, r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots \ (a \neq 0)$ é convergente se, e só se, $|r| < 1$, caso em que sua soma é $\dfrac{a}{1-r}$.
Assim

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots = \frac{a}{1-r}, \ |r| < 1$$

onde r é dito **razão** de Série Geométrica.

De fato:

(i) Se $r = 1$ então $s_n = a + a + \cdots + a = na$, que tende a ∞ ou $-\infty$, conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Portanto a série é divergente.

(ii) Se $r \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro:

$$s_n(1 - r) = a - ar^n = a(1 - r^n)\,.$$

Portanto $s_n = a\dfrac{(1 - r^n)}{1 - r} = \dfrac{a}{1 - r} - \dfrac{a}{1 - r} \cdot r^n\,.$

Se $|r| < 1$, como vimos anteriormente, $r^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \right) = \frac{a}{1-r} .$$

Se $|r| > 1$ ou $r = -1$, como vimos anteriormente, (r^n) é divergente e, consequentemente, $\{s_n\}$ também é, ou seja, a série é divergente. $\square$

Teorema

Se $\sum a_n$ *é uma série convergente então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. A recíproca é falsa.*

Prova: Note que, se $\{s_n\}$ com $s_n = a_1 + \cdots + s_n$ é convergente, temos

$$a_n = s_n - s_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s - s = 0$$

e o resultado está provado. Para ver que não vale a volta considere a série harmônica.

Exercício

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente se, e somente se,* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Teorema

Se $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum a_n$ é uma série convergente se, e somente se, a seqüência das somas parciais é limitada.

Teorema (Comparação)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leqslant c \cdot b_n$, para todo $n \geqslant n_0$, então

- *Se $\sum b_n$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.*
- *Se $\sum a_n$ é divergente, então $\sum b_n$ é divergente.*

Exemplo

Se $r > 1$, $\sum \frac{1}{n^r}$ *é convergente.*

Solução: Simplesmente note que

$$
\begin{aligned}
s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\underbrace{\frac{1}{(2^n - 2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n-2)^r} + \frac{1}{(2^n-1)^r}}_{=2^{n-1}}\right) \\
&< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{4^{r-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)(r-1)}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{r-1}}}
\end{aligned}
$$

Segue do fato que uma seqüência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy que o seguinte resultado vale.

Teorema (Critério de Cauchy para Séries)

$\sum a_n$ é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n \geqslant N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$.

Definição

Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é convergente.

Segue facilmente do critério de Cauchy que

Teorema

Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Não vale a volta.

De fato: Note que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ não é absolutamente convergente mas é convergente. Para concluir que é convergente note que

$$s_2 = 1-\frac{1}{2},\ s_4 = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}),\ s_6 = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})\cdots$$

Sendo assim, $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \cdots$ e $\{s_{2n}\}$ é crescente limitada (por 1) e portanto convergente. Por outro lado

$$s_1 = 1,\ s_3 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}),\ s_5 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}), \cdots$$

Sendo assim, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2(n-1)} > \cdots$ e $\{s_{2n-1}\}$ é decrescente limitada e portanto convergente.

Por outro lado $s_{2n+1} - s_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e portanto $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

Exercício

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência infinitésima de termos não negativos que é decrescente. Mostre que $\sum(-1)^n a_n$ é convergente.

Sugestão: Repita a prova acima substituindo $\frac{1}{n}$ por a_n.

Exercício

- *Seja $\sum b_n$ uma série convergente de termos não negativos. Se existem $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leqslant kb_n$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*
- *Se existem $c \in (0,1)$, $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leqslant k \cdot c^n$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Teorema (Teste da Raiz)

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

De fato: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geqslant n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|a_n| < r^n$ para todo $n \geqslant N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo

Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geqslant 1$.

Solução: Basta ver que $\overline{\lim}\,|n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente para $|a| \geqslant 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.