Seqüências de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

11 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Teorema (Comparação)

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n$, então $a \leqslant b$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geqslant N$ tal que, para todo $n \geqslant N_1$,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo, $\forall\ n \geqslant N_1$,

$$a - \epsilon < a_n \leqslant b_n < b + \epsilon.$$

Disto segue que $a - b < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leqslant 0$.

Teorema (Confronto)

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ *e existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, *então* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geqslant N$ tal que, para todo $n \geqslant N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \ \text{ e } \ \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon.$$

Logo, $\forall\ n \geqslant N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < \ell + \epsilon.$$

Disto segue que $|b_n - \ell| < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N_1$ e que $\{b_n\}$ é convergente com limite ℓ.

Exemplo.

$$e := \lim_{n\to\infty} \overbrace{(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

De fato: Como $a_n \geqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do Teorema (Comparação), $e \geqslant \ell$. Por outro lodo, se $n \geqslant p \geqslant 2$,

$$b_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p-1}{n})$$

do Teorema (Comparação) $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant a_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Segue que $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = e$. Isto mostra que $\ell = e$.

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a seqüência $\{a_n\}$ possui uma subseqüência convergente com limite a.

Já vimos que o conjunto dos valores de aderência de uma seqüência limitada é não vazio.

Definição

Seja $\{a_n\}$ *uma seqüência limitada. Definimos o limite superior* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (*limite inferior* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) *da seqüência* $\{a_n\}$ *por*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} a_k$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} a_k$$

Também escreveremos $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ *ou* $\overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ *para denotar o limite inferior e o limite superior.*

Teorema

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada, então $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ e $b = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$.

Para provar o teorema acima basta verificar que, dada uma vizinhança V_a de a (ou V_b de b) temos que $a_n \in V_a$ ($a_n \in V_b$) para infinitos índices n e proceder como antes para construir a subseqüência.

De fato: Dada vizinhança V_a de a e $r>0$ tal que $(a-r,a+r)\subset V_a$, seja $N\in\mathbb{N}$ tal que $inf_{k\geqslant n}a_k\in(a-r,a+r)$ para todo $n\geqslant N$. Logo, existe $k_1\geqslant N$ tal que $a_{k_1}\in(a-r,a+r)$. Tomando $n_1>k_1\geqslant N$ temos que $inf_{k\geqslant n_1}a_k\in(a-r/2,a+r/2)$ e portanto existe $k_2\geqslant n_1>k_1$ tal que $a_{k_2}\in(a-r/2,a+r/2)$, tendo construído $a_{k_1}\cdots a_{k_p}$ com $a_{k_p}\in(a-r/p,a+r/p)$ tomamos $n_{p+1}>k_p\geqslant N$ tal que $inf_{k\geqslant n_{p+1}}a_k\in(a-r/(p+1),a+r/(p+1))$ e existe $k_{p+1}\geqslant n_{p+1}>k_p$ tal que $a_{k_{p+1}}\in(a-r/(p+1),a+r/(p+1))$. A seqüência $\{a_{k_n}\}$ é convergente com limite a, mostrando o resultado.

Exercício

Mostre que o $b=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n$ *é um valor de aderência*

Segue to Teorema (Confronto) que

Teorema

Se a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$ *então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to\infty} .$$

Além disso, uma seqüência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty}$.

Corolário

Uma seqüência $\{a_n\}$ *é convergente se e, somente se,*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} .$$

Em seguida apresentamos o método das aproximações sucessivas

Teorema (Aproximações Sucessivas)

Se $\kappa \in [0,1)$, $\{a_n\}$ é uma seqüência tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n|$, então $\{a_n\}$ é de Cauchy.

Prova: Se $m > n$ são naturais, $m = n + p$ para algum $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant \kappa^{n+p-1}|a_1 - a_0| + \cdots + \kappa^n |a_1 - a_0| \\ &\leqslant \kappa^n [\kappa^{p-1} + \cdots + 1] |a_1 - a_0| \\ &\leqslant \frac{\kappa^n}{1-\kappa} |a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0| < \epsilon$. Segue que, se $m, n \geqslant N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$ e $\{a_n\}$ é de Cauchy.

Exemplo: Seja $a > 0$ e $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_0 = c > 0$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite $\sqrt{a}$.

De fato: Note que

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\, a_n\, a_{n+1}}\right)(a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

Note que, para todo $t > 0$, $\frac{1}{2}\left(t + \frac{a}{t}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Logo $a_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, para todo $n \geqslant 1$. Disto segue que $2\, a_n\, a_{n+1} > a$ e que

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2\, a_n\, a_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}.$$

Logo, do Método das aproximações sucessivas $\{a_n\}$ é convergente e o limite ℓ deve satisfazer $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, ou seja $\ell^2 = a$.