

# Seqüências de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

08 de Março de 2024

**Primeiro Semestre de 2024**

# Subseqüências e Seqüências de Cauchy

## Definição (Subseqüência)

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência de números reais. Diremos que  $\{b_n\}$  é uma subseqüência de  $\{a_n\}$  se existir uma função estritamente crescente  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $b_k = a_{s(k)}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

## Definição (Seqüências de Cauchy)

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência de números reais. Diremos que  $\{a_n\}$  é de Cauchy se, dado  $\epsilon > 0$  existir um número natural  $N = N(\epsilon)$  tal que  $|a_n - a_m| < \epsilon$  sempre que  $n, m \geq N$ .

# Propriedades

## Teorema

- a) *Uma seqüência  $\{a_n\}$  é convergente se, e somente se, toda subsequência de  $\{a_n\}$  é convergente (com mesmo limite).*
- b) *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*
- c) *Toda seqüência limitada tem subsequência convergente.*
- d) *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*
- e) *Toda seqüência de Cauchy que tem uma subsequência convergente é convergente.*
- f) *Toda seqüência de Cauchy é convergente.*
- g) *Toda seqüência crescente e limitada é convergente.*
- h) *Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.*

**a)** Uma seqüência  $\{a_n\}$  é convergente se, e somente se, toda subsequência de  $\{a_n\}$  é convergente (com mesmo limite).

**De fato:** Se toda subsequência de  $\{a_n\}$  é convergente como  $\{a_n\}$  é uma particular subsequência dela mesma segue o resultado.

Reciprocamente, se  $\{a_n\}$  é convergente com limite  $a$ ,

dado  $\epsilon > 0$  existe  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N$ .

Se  $\{b_n\}$  é uma subsequência de  $\{a_n\}$ , seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função estritamente crescente e tal que  $b_n = a_{s(n)}$ .

Claramente  $s(n) \geq n$  e portanto  $|b_n - a| = |a_{s(n)} - a| < \epsilon, \forall n \geq N$ . Isto mostra que  $\{b_n\}$  é convergente com limite  $a$ .

**b)** Toda seqüência convergente é de Cauchy.

**De fato:** Se  $\{a_n\}$  é convergente com limite  $a$ ,

dado  $\epsilon > 0$  existe  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N$ .

Assim

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall n \geq N.$$

c) Toda seqüência limitada tem subsequência convergente.

**De fato:** Se  $\{a_n\}$  é limitada o conjunto  $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  dos valores da seqüência é limitado e pode ser finito ou infinito.

Se  $I$  é finito, para algum elemento  $a \in I$ ,  $a_n = a$  para infinitos  $n$ . Seja  $\mathbb{N}' = \{n : a_n = a\}$  e tomemos  $s(0)$  = menor elemento de  $\mathbb{N}'$ . Uma vez construídos  $s(0), s(1), \dots, s(n-1)$  seja  $s(n)$  o menor elemento de  $\mathbb{N}' \setminus \{s(0), s(1), \dots, s(n-1)\}$ . Segue que  $\{b_n\}$ ,  $b_n = a_{s(n)} = a$ , é uma subsequência convergente de  $\{a_n\}$ .

Se  $I$  é infinito, do Teorema de Bolzano-Weierstrass,  $I$  tem um ponto de acumulação  $a$ . Seja  $\mathbb{N}_0 = \{n: a_n \in (a-1, a+1), a_n \neq a\}$  e  $s(0)$  o seu menor elemento. Seja  $\epsilon_1 = \frac{|a_{s(0)} - a|}{2}$ ,  $\mathbb{N}_1 = \{n: a_n \in (a-\epsilon_1, a+\epsilon_1), a_n \neq a\}$  e  $s(1)$  o menor elemento de  $\mathbb{N}_1$ .

Construídos  $s(0), s(1), \dots, s(n-1)$  e  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$  seja  $\epsilon_n = \frac{|a_{s(n-1)} - a|}{2}$  e  $s(n)$  o menor elemento de  $\mathbb{N}_n = \{n: a_n \in (a-\epsilon_n, a+\epsilon_n), a_n \neq a\}$ .

Claramente  $\mathbb{N}_1 \supsetneq \mathbb{N}_2 \supsetneq \mathbb{N}_3 \supsetneq \dots$  e  $\{b_n\}$ , com  $b_n = a_{s(n)}$ , é uma subsequência de  $\{a_n\}$ . Além disso, dado  $\epsilon > 0$ , se  $N \in \mathbb{N}$  é tal que  $\epsilon_N < \epsilon$ . Assim,  $s(n) \in \mathbb{N}_N$  e  $|a_{s(n)} - a| < \epsilon_n < \epsilon, \forall n \geq N$ . Isto mostra que  $\{a_{s(n)}\}$  é uma subsequência convergente (com limite  $a$ ) de  $\{a_n\}$ . Observe ainda que todos os elementos da subsequência  $\{a_{s(n)}\}$  são distintos.

d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.

**De fato:** Se  $\{a_n\}$  de Cauchy existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a_m| < 1$ ,  $\forall n \geq N$ . Se  $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$ ,  $a_n \in [-M, M]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .



e) Toda seqüência de Cauchy que tem uma subseqüência convergente é convergente.

**De fato:** Se  $\{a_n\}$  de Cauchy, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\forall n \geq N_1$ . Se  $\{b_n\} = \{a_{s(n)}\}$  é uma subseqüência convergente (com limite  $a$ ) de  $\{a_n\}$ , existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\forall n \geq N_2$ . Seja  $N = \max\{N_2, N_1\}$  e  $n \geq N$ . Logo

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{s(n)}| + |a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que  $\{a_n\}$  converge para  $a$ .

f) Toda seqüência de Cauchy é convergente.

**De fato:** Isto segue diretamente de d), c) e e).

### Exercício

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência. Dado  $p \in \mathbb{N}$ , mostre que  $\{a_n\}$  é convergente (de Cauchy) se, e somente se,  $\{a_{n+p}\}$  é convergente (de Cauchy).

g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

**De fato:** Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência crescente e limitada e  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Da definição de sup e do fato que  $\{a_n\}$  é crescente, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a$ . Logo  $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N$ , e  $\{a_n\}$  é convergente com limite  $a$ .

h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

**Exercício:** Mostre h).

## Exemplo

Mostre que

- $\{a, a, a, \dots\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , é convergente
- $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$  não é convergente.
- $\{n\}$  não é convergente.

## Exemplo

Se  $\mathbb{R} \ni a \geq 0$  mostre que a seqüência  $\{a^n\}$  é convergente se  $0 \leq a \leq 1$  e divergente se  $a > 1$ .

**De fato:** Se  $a > 1$ ,  $a = 1 + h$  com  $h > 0$ . Logo

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k > 1 + nh.$$

Da propriedade Archimediana da reta, a seqüência  $\{a^n\}$  é ilimitada e portanto divergente.

Se  $0 \leq a < 1$   $\{a^n\}$  é decrescente e limitada inferiormente por 0. Segue de  $h)$  que  $\{a^n\}$  é convergente com limite  $\ell \in [0, 1)$ . Ainda  $a^{2n} = a^n \cdot a^n$ . Logo, de  $a)$  e das propriedade do produto de seqüências convergentes  $\ell = \ell^2$ . Segue que  $\ell = 0$ .

Se  $a = 1$ ,  $a^n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e portanto  $\{a^n\}$  é convergente.

**Exemplo**

Mostre que, se  $a \neq 1$ ,  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  e que a seqüência  $\left\{ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right\}$  é convergente se  $0 \leq a < 1$  e divergente se  $a > 1$ .

**De fato:** Note que, se  $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ ,  $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$  e  $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ , sempre que  $a \neq 1$ . O resultado agora segue do exemplo anterior.

**Exemplo**

Mostre que, a seqüência  $\{a_n\}$  com  $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é convergente.

**De fato:** É claro que  $\{a_n\}$  é crescente e que  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , para  $n \geq 2$ . Logo  $a_n \leq 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$ . Segue que  $\{a_n\}$  é convergente. Denotaremos o seu limite por  $e$ .

**Exemplo**

Mostre que a seqüência  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  é convergente.

**De fato:** Em primeiro lugar note que

$$b_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k} \text{ ou seja}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \binom{n}{1} n^{-1} + \overbrace{\binom{n}{2} n^{-2}}^{\frac{n(n-1)}{2!}} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^{-n+1} + \overbrace{\binom{n}{n} n^{-n}}^{\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}_{=n^{-1}} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < e \end{aligned}$$

Como cada termo da **soma** que define  $b_n$  é crescente obtemos que  $b_n$  é crescente. Segue que  $\{b_n\}$  é convergente com limite

$$\ell = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq e.$$



## Exemplo

Mostre que a seqüência  $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ , com  $a > 0$ , é convergente.

**De fato:** Recorde que  $a^{\frac{1}{n}}$  é o único número real positivo  $x$  tal que  $x^n = a$ . Logo se  $x = a^{\frac{1}{n}}$  e  $y = a^{\frac{1}{n+1}}$  temos  $x^{n+1} = y^{n+1} \cdot x$  e portanto,

- Se  $0 < a < 1$ , então  $x < 1$  e  $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1$  e  $x < y$ .
- Se  $a > 1$ , então  $x > 1$  e  $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1$  e  $x > y$ .

Logo, se  $a < 1$ ,  $\{a^{\frac{1}{n}}\}$  é crescente e limitada superiormente por 1 portanto convergente e, se  $a > 1$ ,  $\{a^{\frac{1}{n}}\}$  é decrescente e limitada inferiormente por 1. Em qualquer dos casos é convergente com limite  $\ell > 0$ . Note que  $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$  e, de a) e das propriedades do quociente de seqüências,  $\ell = 1$ .

## Exemplo

Mostre que a seqüência  $\{c_n\}$  com  $c_0 = 1$  e  $c_n = n^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \geq 1$ , é convergente.

**De fato:** Recorde que, para  $n \geq 3$ ,  $n > b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ . Logo, para  $n \geq 3$ ,  $n^{n+1} > (n+1)^n$  e, conseqüentemente,  $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ .

Isto mostra que  $\{n^{\frac{1}{n}}\}$  é decrescente e limitada inferiormente por 1. Segue de h) que  $\{c_n\}$  é convergente com limite  $\ell \geq 1$ . Ainda  $(2n)^{\frac{1}{2n}}(2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}$  e portanto, de a) e do exemplo anterior,  $\ell^2 = \ell$  e  $\ell = 1$ .

## Teorema

Se  $\{a_n\}$  é limitada e  $\{b_n\}$  é infinitésima, então  $\{a_n \cdot b_n\}$  é infinitésima.

**Prova:** Como  $\{a_n\}$  é limitada seja  $M > 0$  tal que  $|a_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{b_n\}$  é infinitésima, dado  $\epsilon > 0$  seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$ , para todo  $n \geq N$ . Segue que

$$|a_n \cdot b_n| \leq M|b_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Isto prova que  $\{a_n \cdot b_n\}$  converge para 0 e conclui a demonstração.

## Exemplo

Mostre que  $\left\{\frac{n+\cos n}{n+1}\right\}$  é convergente.

# Comparação e Confronto

## Teorema (Comparação)

Se  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ,  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  e existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,  $a_n \leq b_n$ , então  $a \leq b$ .

**Prova:** Dado  $\epsilon > 0$  existe  $N_1 \geq N$  tal que, para todo  $n \geq N_1$ ,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo,  $\forall n \geq N_1$ ,

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon.$$

Disto segue que  $a - b < 2\epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  e, portanto,  $a - b \leq 0$ .

## Teorema (do Confronto)

Se  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ ,  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$  e existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , então  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ .

**Prova:** Dado  $\epsilon > 0$  existe  $N_1 \geq N$  tal que, para todo  $n \geq N_1$ ,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \text{ e } l - \epsilon < c_n < l + \epsilon.$$

Logo,  $\forall n \geq N_1$ ,

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon.$$

Disto segue que  $|b_n - l| < \epsilon$ ,  $\forall n \geq N_1$  e que  $\{b_n\}$  é convergente com limite  $l$ .

**Exemplo.**

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

**De fato:** Como  $a_n \geq b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , do Teorema (Comparação),  $e \geq \ell$ . Por outro lado, se  $n \geq p \geq 2$ ,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

do Teorema (Comparação)  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq a_p$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ . Segue que  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ . Isto mostra que  $\ell = e$ .