Seqüências de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

08 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Seqüências

Definição

Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Notações: $\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \end{array} \right.$

Exemplos:

Sendo $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência $\left\{1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\cdots\right\}$

Sendo $a_n = 6$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência constante:

$$\{6\,,\,6\,,\,\ldots 6\,,\,\ldots\}$$

Sendo $\{a_n\}$ onde

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 7, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e} \\ a_{2n} &= 4, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

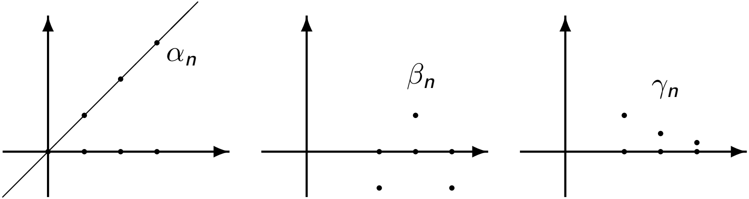
temos

$$\{4, 7,\ 4,\ 7,\ 4,\ \ldots\}$$

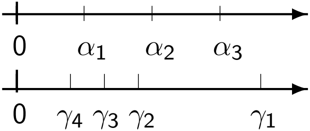
Consideremos as seqüências:

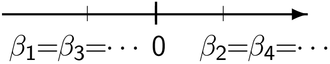
$$\alpha_n = n\,; \quad \beta_n = (-1)^n \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}\ .$$

Como funções eles podem ter os seus gráficos traçados, mas estes geralmente são pouco significativos.



Uma representação para seqüências que pode ser mais conveniente é obtida colocando-se os pontos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sobre uma reta.





Esta representação pode mostrar para onde a seqüência “tende”.

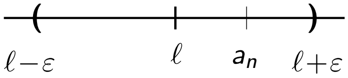
A seqüência (α_n) “diverge” para infinito, a seqüência (β_n) é dita “oscilante” e a seqüência (γ_n) “converge para 0”.

Todas estas frases podem ser definidas precisamente, e é o que faremos.

Definição

A seqüência $\{a_n\}$ *é dita* **convergente com limite ℓ** *se para cada* $\varepsilon > 0$ *dado,* $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Note que: $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.



A partir de um certo N todos os a_n estão no intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Da arbitrariedade do ε os a_n vão se juntando em torno de ℓ.

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ou $a_n \to \ell$ ou $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Observação 1. Note que a definição anterior é extatamente a mesma que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, vista no cálculo para funções definidas em conjuntos que não são limitados superiormente no caso em que este domínio é $\mathbb{N}$.

Observação 2. Quando uma seqüência tem limite 0 ela será dita, frequentemente, **infinitésima**.

Exemplos:

- $\dfrac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  De fato: Dado $\varepsilon > 0$, da propriedade Arquimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N\epsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$ temos
  $$0 - \varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \varepsilon.$$

- $\dfrac{n}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

  De fato: Dado $\varepsilon > 0$.

  Queremos encontrar $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > N \Rightarrow \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

  mas $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $(N+1)\epsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$
  $$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon.$$

Definição

Uma seqüência $\{a_n\}$ *será* **divergente** *quando ela* **não** *for convergente.*

(I) **Seqüência divergente para $+\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $+\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \to a_n > K$.

(II) **Seqüência divergente para $-\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $-\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \to a_n < -K$.

(III) **Seqüência oscilante**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita oscilante quando diverge, mas não diverge para $+\infty$ e nem para $-\infty$.

Observação: Como seqüências são funções elas podem ser multiplicadas por uma constante e duas seqüências podem ser somadas ou multiplicadas.

Operações com Seqüências

Assim, dadas duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e um número real c, definimos:

- $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- e se $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Teorema

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais.

a) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow$ toda vizinhança de a contém todos exceto possivelmente um número finito dos a_n's.

b) O limite é único.

c) $\{a_n\}$ é convergente, então $\{a_n\}$ é limitada (não vale a volta).

d) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $\forall n \geq N$.

e) Se $A \subset \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma seqüência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a.

Teorema

Seja $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *então*

a) $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$.

b) $c.a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c.a$

c) $a_n.b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a.b$.

d) Se $b \neq 0$ *e* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_n/b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a/b$.