

Números - Revisão

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

06 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Produto

Definição

- Se α, β são cortes,

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha \cdot 0^* = 0^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \beta \text{ tais que } p \leq rs\}, \quad \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ - [(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ - [\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

\mathbb{R} é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por \mathbb{R} . Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso \mathbb{R} é completo.

\mathbb{R} é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por \mathbb{R} . Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso \mathbb{R} é completo.

Mostre o teorema acima.

Módulo de um Número Real

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** ou *valor absoluto* de x é dado por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Disto segue que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que $|x|^2 = x^2$, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.

Exemplo

A equação $|x| = r$, com $r > 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\{r, -r\}$.

Distância

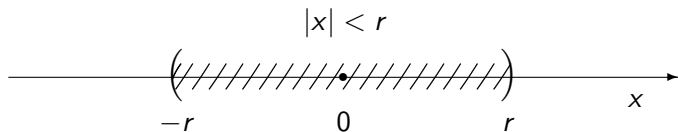
Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é definida por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ . Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0 .

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r , com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r .

Exemplo

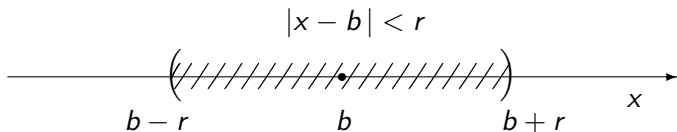
Seja com $r > 0$. Então $|x| < r \iff -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de \mathbb{R} que distam de 0 menos que r ('bola' de raio r em torno de 0).

Analogamente $|x - b| < r$, $r > 0$, se e somente se,
 $b - r < x < b + r$. Geometricamente,



Exemplo

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$|xy| = |x| |y|.$$

Exemplo (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Resolução: Somando $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$. \square

Definição

Um **intervalo** em \mathbb{R} é um subconjunto de \mathbb{R} que tem uma das seguintes formas:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ **Intervalo fechado,**
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ **Intervalo aberto,**
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Limitação de Subconjuntos de \mathbb{R}

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito **limitado**, se existir $L > 0$ tal que $|x| \leq L$, para todo $x \in A$.

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, existir $L > 0$ tal que $A \subset [-L, L]$.

Exemplo

(a) $A = [0, 1]$ é limitado

(b) \mathbb{N} não é limitado (será mostrado mais tarde)

(c) $B = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ é limitado

(d) $C = \left\{ \frac{2n - 1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é limitado.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito **ilimitado**, se ele não for limitado.

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será ilimitado se, e somente se, para todo $L > 0$, existir $x \in A$ tal que $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- A será dito **limitado superiormente**, se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq L$, para todo $x \in A$.
Neste caso, L será chamado **limitante superior** de A .
- A será dito **limitado inferiormente**, se existir ℓ tal que $x \geq \ell$, para todo $x \in A$.
Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** de A .

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição (Supremo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A , tivermos $\bar{L} \leq L$.

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, \bar{L} será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de \mathbb{R} tem **supremo**.

Ínfimo

Definição (Ínfimo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{l} \in \mathbb{R}$ é o *ínfimo* de A (escreveremos $\bar{l} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior l de A , tivermos $\bar{l} \geq l$.

- Quando $\bar{l} = \inf A \in A$, \bar{l} será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\bar{l} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de \mathbb{R} tem **ínfimo**.

Proposição (1)

Dado $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e somente se,

- (a) L for limitante superior de A e,
- (b) para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a > L - \varepsilon$.

Analogamente temos

Proposição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Então $L = \inf A$ se, e somente se,

- (a) L for limitante inferior de A .
- (b) Para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a < L + \varepsilon$.

Teorema (Propriedade Arquimediana de \mathbb{R})

O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado sempre que $x \neq 0$.

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Como $x > 0$ seja $0 < q < x$, da definição de \sup , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - q < mx$ e $L = \sup A < mx + q < (m+1)x$, o que é uma contradição.

A prova do caso $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. \square

Exemplo

- (a) Considere $A = [0, 1)$. Então -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto 1 , π e 101 são limitantes superiores de A .
- (b) \mathbb{N} não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0 , pois $0 \leq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
- (c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por L , onde $L \geq \sqrt{2}$.

Corolário (1)

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad \text{e} \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional.

Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário

Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Corolário

Se $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$, então $\inf A = 0$.

Exemplo

(a) Seja $A = (0, 1]$. Então $0 = \inf A$ e $1 = \max A$.

(b) $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ é um corte.

(c) Seja $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Então $\sqrt{2} = \sup C$ e $-\sqrt{2} = \inf C$.

Note que $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ não pertencem a C .

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C . Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição

Se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ ($\sup A = -\inf(-A)$).

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leq x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),
- $-\inf(A) \geq -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $b = -a \in -A$ tal que $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário

Todo $A \neq \emptyset$ e limitado inferiormente de \mathbb{R} tem ínfimo.

Corolário

Todo subconjunto limitado e não vazio de \mathbb{R} tem ínfimo e supremo.

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a .

Exemplo (δ -vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ que será chamada δ -vizinhança de a .

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo $\delta > 0$, existir $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, então b será dito um **ponto de acumulação** de A .

Exemplo

- (a) O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é $[a, b]$.
- (b) Seja $B = \mathbb{Z}$. Então B não tem pontos de acumulação.
- (c) Subconjuntos finitos de \mathbb{R} não têm pontos de acumulação.
- d) O conjunto dos pontos de acumulação de \mathbb{Q} é \mathbb{R} .

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. Um ponto $b \in B$ será dito um **ponto isolado** de B , se existir $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b)$ não contém pontos de B distintos de b .

Exemplo

- (a) Seja $B = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de B é $\{0\}$ e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B .
- (b) O conjunto \mathbb{Z} possui apenas pontos isolados.

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo \mathbb{Z}).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A é um subconjunto infinito e limitado de \mathbb{R} então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -a_0 = L$, $b_n - a_n = 2L/2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A . Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j]$, $j \leq n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n]$, $j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leq b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leq b_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leq a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n] \subset (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A . \square