Números - Revisão

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

04 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Cortes de Dedekind (1831 a 1916)

A idéia que queremos usar para construir (a partir de $\mathbb{Q}$) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é:

> "O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição (Cortes de Dedekind-1872)

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se* $p \in \alpha$ *e* $\mathbb{Q} \ni q < p$, *então* $q \in \alpha$ *e*
- *Se* $p \in \alpha$, *existe* $r \in \alpha$ *com* $p < r$.

Exemplo

- *Se* $q \in \mathbb{Q}$ *definimos* $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. *Então* q^* *é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*
- $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant q$ *para algum* $q \in \mathbb{Q}$ *com* $q^2 < 2\}$ *é irracional.*

Observação

Note que:

- *Se* α *é um corte,* $p \in \alpha$ *e* $q \notin \alpha$*, então* $p < q$.
- *Se* α *é um corte,* $r \notin \alpha$ *e* $r < s$*, então* $s \notin \alpha$.

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ *se* $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ *são cortes*

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ and 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ and 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe um único* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + \beta = 0^*$. *O corte* β *é dado por*

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova: De fato:

- Se $p \notin \alpha$ então $s = p + 1 \notin \alpha$ e $-s \in -\alpha$, logo $-\alpha \neq \varnothing$. Da definição de $-\alpha$, se $p \in \alpha$ então $-p \notin -\alpha$, logo $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- Se $-p \in -\alpha$ e $-q < -p$ então existe $\mathbb{Q} \ni r > 0$ tal que $q > q - r > p - r \notin \alpha$ e portanto $-q \in -\alpha$.
- Agora, se $-p \in -\alpha$ existe $\mathbb{Q} \ni 2r > 0$ tal que $p - 2r \notin \alpha$ e portanto $p - r \notin \alpha$ e $-p < -p + r \in -\alpha$.

Resta mostrar que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$. Se $r \in \alpha$ e $s \in -\alpha$ então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, ou seja, $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subset 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Isto conclui a demonstração.$\square$