Números - Revisão

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

04 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024
SMA 0380

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x\,1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x\,1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Mostre a propriedade acima.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x+z=y+z \implies x=y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x+0 = x+(z+(-z)) = (x+z)+(-z) \\ &= (y+z)+(-z) = y+(z+(-z)) = y+0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\tfrac{1}{z}) = (x.z).(\tfrac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\tfrac{1}{z}) = y.(z.(\tfrac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição

O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição

O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.

Definição

Diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \textit{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \textit{ se } \frac{a}{b} \textit{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \textit{ se } \frac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é **menor do que** *y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, poderemos dizer que y é **maior do que** *x e escrevemos $y > x$. Em particular, teremos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leqslant y$ e lemos "*x é menor ou igual a y*".

Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geqslant x$ e, neste caso, lemos "*y é maior ou igual a x*".

Escreveremos $x \geqslant 0$ se x for não-negativo e $x \leqslant 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

Mostre as propriedades acima.

Proposição

Para quaisquer x, y, z, w *no corpo ordenado* $\mathbb{Q}$*, valem*

(a) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \Longrightarrow x + z \leqslant y + w.$

(b) $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} = xz \leqslant yw.$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

Mostre a parte a) da proposição.

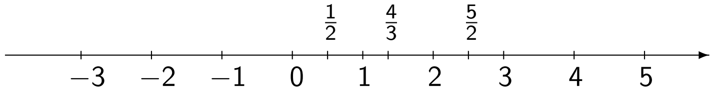
Outras propriedades:

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} = xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- (**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- (**anulamento do produto**) $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

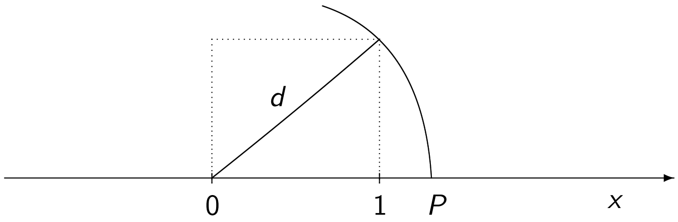


Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a interseção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos

(a) *Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;*

(b) *Se a^2 for par, então a é par.*

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por redução ao absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par. $\square$

Proposição

A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.
Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 .$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$. $\square$

Exercício

Sejam $p_1, p_2, \cdots p_n$ números primos distintos. Mostre que a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não admite solução racional.

Corpos

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado.

Estaremos também interessados no corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Abstratamente, um corpo é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ onde estão definidas duas operações binárias

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

que gozam das seguintes propriedades

Propriedades de um Corpo - Adição

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{F}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{F}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{F}$, existe $y \in \mathbb{F}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades de um Corpo - Multiplicação

(M1) (**associativa**) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{F}$;

(M2) (**comutativa**) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{F}$, tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{F}$, $x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{F}$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{F}\,.$

Se no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma relação de ordem $\leqslant$, a quádrupla $(\,\mathbb{F}\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,\leqslant\,)$ é um corpo ordenado se além das propriedades anteriores, também valem as propriedades:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y \;\text{ e }\; y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y\,,\; y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, $x \leqslant y \;\text{ ou }\; y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y \;\text{ e }\; z \geqslant 0 \implies x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Definição

- *Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ (chamado limitante superior de A) tal que $a \leqslant L$ para todo $a \in A$.*
- *Se $A \subset \mathbb{F}$ for limitado superiormente, diremos que um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ é o supremo de A, se for o menor limitante superior de A; ou seja, se $a \leqslant \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.*
- *Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.*

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo; ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não é completo.

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

- O que são os números reais?
- Como definir adição, multiplicação de números reais?
- O conjunto dos números reais com a adição e multiplicação é um corpo?
- Como definir relação de ordem para números reais?
- O corpo ordenado dos números reais é completo?

A idéia que queremos usar para construir (a partir de $\mathbb{Q}$) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é:

"O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ a esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais a esquerda de um elemento de α estão em α) e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento).*

Observação

Os cortes foram inventados em 1872 pelo matemático alemão chamado Julius Wilhelm Richard Dedekind que viveu de 06.10.1831 a 12.02.1916)

Exemplo

- *Se* $q \in \mathbb{Q}$ *definimos* $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. *Então* q^* *é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*
- $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *é irracional.*

Observação

Note que:

- *Se* α *é um corte,* $p \in \alpha$ *e* $q \notin \alpha$*, então* $p < q$*.*
- *Se* α *é um corte,* $r \notin \alpha$ *e* $r < s$*, então* $s \notin \alpha$*.*

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ *se* $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ são cortes

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe um único* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + \beta = 0^*$. *O corte* β *assim definido é denotado por* $-\alpha$.

Prova: É fácil ver que
$-\alpha = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$.$\square$

Definição

- *Se α, β são cortes,*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \{p \in \mathbb{Q} : \exists\, 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha \text{ tais que } p \leqslant rs\}, \ \alpha, \beta > 0^* \\ \alpha \cdot 0^* = 0^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso $\mathbb{R}$ é completo.

Mostre o teorema acima.

Módulo de um Número Real

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Segue da definição acima que $|x| \geqslant 0$ e $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que $|x|^2 = x^2$, *ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

Exemplo

A equação $|x| = r$, *com* $r \geqslant 0$, *tem como soluções os elementos do conjunto* $\{r, -r\}$.

O resultado do Exemplo 3 pode ser generalizado como no exemplo seguinte.

Exemplo

A equação $|ax - b| = r$, *com* $r \geqslant 0$ *e* $a \neq 0$, *tem como soluções os elementos do conjunto* $\left\{\dfrac{b+r}{a}, \dfrac{b-r}{a}\right\}$.

Exemplo

Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.

Resolução: Temos $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$, o que nos leva à solução $x = 1$ ou $x = -2$. $\square$

Distância

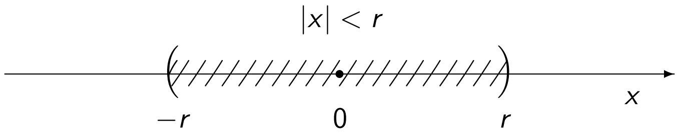
Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r, com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo

Seja com $r > 0$. *Então* $|x| < r \iff -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$ que distam de 0 menos que r (bola de raio r em torno de 0).

Agora, vamos generalizar o Exemplo acima.

Exemplo

Resolva a inequação $|ax - b| < r$ na variável x, com $r > 0$ e $a \neq 0$.

Resolução: De forma similar ao exemplo anterior, $-r < ax - b < r$. Somando b aos termos da inequação obtemos

$$b - r < ax < b + r.$$

Logo,

- $a > 0 \implies \dfrac{b-r}{a} < x < \dfrac{b+r}{a}$;
- $a < 0 \implies \dfrac{b+r}{a} < x < \dfrac{b-r}{a}$. $\square$

No caso particular $a = 1$, se a distância de x a b for menor do que r, isto é, $|x - b| < r$, $r > 0$, então x estará entre $b - r$ e $b + r$. Geometricamente,