Informações Essenciais e Números
SMA 0380 - Análise

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

04 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Acesso ao ambiente de aprendizado eletrônico

E-DISCIPLINAS USP

Todas as informações e material do curso estão disponíveis em https://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID or Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma0380/Analise_SMA0380.html

Ementa

- **Números:**
  - Os axiomas de Peano e os números naturais
  - Números inteiros e as propriedades de grupo
  - Números racionais e as propriedades de corpo
  - Números reais: Cortes de Dedekind
- **Seqüências e séries de números reais:**
  - Seqüências: Definição e propriedades
  - Convergência de seqüências
  - Seqüências de Cauchy e Completamento
  - Séries: Definição e propriedades
  - Séries de termos positivos
  - Séries de potências
  - Testes da raiz e da razão
  - Séries de rearranjadas

- **Continuidade:**
  - Funções Contínuas
  - Limites de funções
  - Funções contínuas
  - Funções e compacidade
  - Funções e conexão
  - Descontinuidades
- **A Diferenciabilidade:**
  - Definição e propriedades
  - O Teorema do valor médio
  - Fórmula de Taylor
  - Séries de Potências e analiticidade

- **As integrais de Riemann-Stieltjes:**
  - Definição e propriedades
  - Integração e Diferenciação
- **Seqüências e séries de funções:**
  - Convergência uniforme
  - Convergência uniforme e continuidade
  - Convergência uniforme e diferenciabilidade
  - Convergência uniforme e integração
  - Famílias equicontínuas
  - O Teorema de Stone-Weierstrass

Provas

Provas

- Prova 1 (Peso 2): 12/04 das 08:10 às 09:50hs
- Prova 2 (Peso 2): 17/05 das 08:10 às 09:50hs
- Prova 2 (Peso 3): 21/06 das 08:10 às 09:50hs
- Prova Substitutiva (do bem): 28/06 das 08:10 às 09:50hs
- Período de Recuperação: 11 a 19 de Julho de 2024

Calendário de Aulas

Horário das Aulas: 08:10–09:50hs (segunda, quarta e sexta)
Local das Aulas: Sala 5-004 - ICMC

Calendário de Aulas

Mês	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex
Mar	04	06	08	11	13	15	18	20	22	**25**	**27**	**29**			
Abr	01	03	05	08	10	**12**	15	17	19	22	24	26	29		
Mai		**01**	03	06	08	10	13	15	**17**	20	22	24	27	29	**31**
Jun	03	05	07	10	12	14	17	19	**21**	24	26	**28**			
Jul	01														

Atendimento

- Sala 3-123 - Quarta Feira das 14:00 às 16:00hs.
- Entre em contato se precisar de atendimento fora desse horário.

Recuperação de Aprendizado

Você teve que perder alguma prova?

- Caso necessite de recuperação de aprendizado por razões médicas ou algum outro compromisso oficial, você deverá fazer a prova substitutiva no dia 28/06 às 08:10hs.
- Informe-se na Secretaria da Graduação do seu Curso para saber se você pode requerer a recuperação de aprendizado e a documentação necessária.
- O período de recuperação será de 11 a 19 de Julho de 2024. A prova será marcada oportunamente.

Os Números

Faremos uma apresentação sucinta do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais e suas construções para servir como base para o que será desenvolvido posteriormente. Faremos também algumas formalizações que ajudam na compreensão dos conceitos que serão desenvolvidos posteriormente.

Escreveremos

$$\boxed{\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números naturais,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números inteiros,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,;\ a,b\in\mathbb{Z}\,,\ b>0\right\}=\text{Conjunto dos números racionais.}}$$

Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos e são caracterizados pelos **Axiomas de Peano**:

1. Todo número natural tem um único sucessor.
2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
3. Existe um único natural, chamado **zero** (denotado por 0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se $n \in X$, seu sucessor (denotado por $n+1$) também pertence a X. Então $X = \mathbb{N}$.

A adição é definida por: $n+0 := n$, $n \in \mathbb{N}$, e $n+(p+1) := (n+p)+1$, $n, p \in \mathbb{N}$, (sabendo somar p sabemos somar $p+1$).

A multiplicação é definida por: $n \cdot 0 = 0$ e $n \cdot (p+1) := n \cdot p + n$, $n, p \in \mathbb{N}$.

Prova por Indução

O quarto Axioma de Peano é conhecido como axioma de indução e é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Prova por Indução: Dado que uma proposição $P(n)$, definida para todo $n \in \mathbb{N}$, pode ser verdadeira ou falsa, para verificar que a mesma é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ basta verificar que:

- $P(0)$ é verdadeira e
- Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é.

De fato: Se X denota o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira, então $0 \in X$ e, se $n \in X$, então $n+1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$ pelo quarto Axioma de Peano.

Exercício: Mostre que $n \cdot 1 = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que a adição e multiplicação definidas acima são comutativas e associativas.

Vamos provar a comutatividade e associatividade da adição:

Lema (1)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + n = n + 1$ e $0 + n = n + 0$.

Prova: Faremos ambas as provas ao mesmo tempo. Note que o resultado é válido para $n = 0$. Suponha que o resultado seja válido para $n = k$ e mostremos que vale também para $n = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$1 + (k+1) \overset{(d)}{=} (1+k) + 1 \overset{(h)}{=} (k+1) + 1$$

$$0 + (k+1) \overset{(d)}{=} (0+k) + 1 \overset{(h)}{=} (k+0) + 1 \overset{(d)}{=} k + 1 \overset{(d)}{=} (k+1) + 0$$

Segue que o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$.$\square$

Agora motremos a associatividade.

Lema (Associatividade)

Para todo $n, p, r \in \mathbb{N}$, $(n+p)+r = n+(p+r)$.

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para $r = 0$ e para $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $r = k$ e mostremos que vale também para $r = k+1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$\begin{aligned} n+(p+(k+1)) &\overset{(d)}{=} n+((p+k)+1) \overset{(d)}{=} (n+(p+k))+1 \\ &\overset{(h)}{=} ((n+p)+k)+1 \overset{(d)}{=} (n+p)+(k+1). \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Por fim provamos a comutatividade

Lema (Comutatividade)

Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, $n + p = p + n$.

Prova: Note que o resultado é válido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $p = 0$ ou $p = 1$ (Lemma (1)). Suponha que o resultado seja válido para $p = k$ e mostremos que vale também para $p = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h), da definição de adição (d), do Lema (1) (l1) e do Lema (Associatividade) (la),

$$
\begin{aligned}
n + (k+1) &\overset{(d)}{=} (n+k) + 1 \overset{(h)}{=} (k+n) + 1 \\
&\overset{(\mathrm{l1})}{=} 1 + (k+n) \overset{(\mathrm{la})}{=} (1+k) + n \overset{(\mathrm{l1})}{=} (k+1) + n.
\end{aligned}
$$

Segue que o resultado vale para todo $p \in \mathbb{N}$.$\square$

Lema (Lei do Cancelamento)

Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m + n = m + p$ implica $n = p$.

Prova: Primeiramente mostremos que, $0 \neq p$ para todo natural p não nulo. Se $p \neq 0$, p é sucessor de um natural (denotado por $p-1$) e $0+p = 0+((p-1)+1) = (0+(p-1))+1 = (p-1)+1$. Logo, como 0 não é o sucessor de nenhum número natural, $0+0 = 0+p$ implica $p = 0$. Se $k+0 = k+p$ implica $p = 0$, temos que

$$(k+1)+0 = k+(1+0) = k+(0+1) = (k+0)+1$$

$$\|$$

$$\overbrace{(k+1)+p} = k+(1+p) = k+(p+1) = (k+p)+1$$

Como números naturais distintos tem sucessores distintos seque gue $k+0 = k+p$ e portanto $p = 0$. O restante da prova é deixada como exercício.$\square$

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leq n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.
- O_3: *Transitiva:* Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leq n$ ou $n \leq m$.
- O_5: Se $m \leq n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leq n + p$ e $mp \leq np$.

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leq n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.
- O_3: *Transitiva:* Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leq n$ ou $n \leq m$.
- O_5: Se $m \leq n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leq n + p$ e $mp \leq np$.

Mostre as propriedades acima.

Exercício (Mostre que:)

- *Todo subjconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *tem um menor elemento.*

- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Todo natural maior que 1 é 'produto' de fatores primos.*

  De fato: *Sejam* $S = \{n \in \mathbb{N}^* : n$ *é primo ou produto de fatores primos*$\}$ e $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \neq 1 e n \notin S\}$. *Note que o produto de elementos de* S *é um elemento de* S. *Se* $A \neq \varnothing$, *então* A *tem um primeiro elemento* a. *Como* $a \notin S$ *devemos ter que* $a = m.n$ *com* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *distintos de* 1. *Note que* $n < a$ e $m < a$ *e ao menos um deles pertence a* A. *Isto é uma contradição pois* a *é o menor elemento de* A. *Segue que* $A = \varnothing$.

Os Números Inteiros

A maneira usual de fazer a construção dos inteiros a partir dos naturais consiste em tomar os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação $(a, b) \sim (c, d)$ se $a + d = b + c$.

Desta forma, podemos representar
$\mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \cdots\}$ e $-\mathbb{N}^* = \{\cdots, (0,3), (0,2), (0,1)\}$.

Tomar o sucessor significa somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar $(1, n)$ com $(0, n-1)$.

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}\,.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z), \ \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}\,;$

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x, \ \forall\ x, y \in \mathbb{Q}\,;$

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}\,;$

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0\,;$

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$

Mostre a propriedade acima.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\tfrac{1}{z}) = (x.z).(\tfrac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\tfrac{1}{z}) = y.(z.(\tfrac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição

O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição

O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.