Espaços Métricos
Introdução

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Introdução

Vamos começar mencionando um texto famoso de David Hilbert

... Ich möchte ... darauf hinweisen, wie sehr es im We sen der mathematischen Wissenschaft liegt, daß jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theo rien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen, und daß es daher dem einzelnen Forscher, in dem er sich diese schärferen Hilfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orien tieren, als dies für irgendeine andere Wissenschaft der Fall ist.

David Hilbert 1862-1943

Que eu tomei a liberdade de traduzir da seguinte forma

... Eu gostaria de salientar, o quanto é da natureza da ciência matemática, que um progresso real sempre ande de mãos dadas com a descoberta de ferramentas mais poderosas e métodos mais simples que, ao mesmo tempo, facilitam o entendimento de teorias anteriores e eliminam desenvolvimentos mais antigos enrredados. Desta forma, o pesquisador individual, ao adotar essas ferramentas e métodos, familiarizar-se-á mais facilmente com um dos vários ramos desta ciência do que em qualquer outra.

David Hilbert 1862-1943

Pois bem, os espaços métricos (um conjunto com uma noção de distância) são um exemplo da forma como a matemática avança.

Por um lado, dentre todas as ciências, a Matemática é talvez a única para a qual cada evolução faz parte do conjunto de conhecimentos, para sempre.

Por outro lado, avanços do tipo mencionado por Hilbert proporcionam colapsos de áreas da matemática tornando mais fácil alcançar a fronteira do conhecimento.

Os espaços métricos foram introduzidos por Maurice Fréchet em sua tese sobre análise funcional (Veja, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) **22**, 1-72 (1906)).

Naqueles dias, uma abordagem matemática axiomática e abstrata ainda não era tão rotineira quanto nos dias de hoje.

Os matemáticos daquela época estavam estudando vários espaços (principalmente espaços de funções) e haviam várias noções de convergência (associadas aos diferentes espaços estudados).

... Havia uma necessidade enorme de unificação.

Neste contexto, a genialidade, da contribuição de Frechét, foi axiomatizar a noção de distância e provar que muitos dos espaços estudados eram espaços métricos.

Desta forma, provando o resultado para um espaço abstrato, este automaticamente valia para todos os espaços estudados.

Esta é a motivação histórica. Na visão moderna, o conceito de espaço métrico é apenas uma axiomatização da noção de distância.

Esta é uma das axiomatizações mais simples, em particular, para estudantes que vêem sistemas axiomáticos desde o início, comum nos dias de hoje.

A noção de distância é muito importante, por exemplo, ela é usada na definição de limite. Além disso, muitas noções geométricas dependem da noção de distância (por exemplo, círculos).

É natural destilar algumas propriedades comuns das distâncias em vários contextos e defini-las como axiomas.

... Disto resultam os espaços métricos.

As aplicações dos **espaços métricos** são inúmeras. A mais importante delas sendo a grande unificação de idéas que permitem rapidamente compreender diversas áreas da matemática.

Vou citar mais algumas

- Do **Princípio da Contração de Banach,** que faremos mais tarde, quando estudarmos espaços métricos completos:
  - O método de Newton para encontrar zeros de funções.
  - Os Teoremas das funções implícitas e inversas.
  - O Teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias e integrais.
  - A Propriedade do ponto de sela, as variedades inerciais e a robusteza das dicotomias exponenciais sob perturbação, para equações diferenciais.

- Do **Lema de Baire** que faremos quando falarmos de categorias, em espaços métricos completos, seguem
  - Os teoremas fundamentais da análise funcional: Os Teoremas da Aplicação Aberta, do Gráfico Fechado e o Princípio da Limitação Uniforme.
- A conexidade é muito aplicada à teoria espectral (localização do espectro) e aos semigrupos de operadores lineares.
- Boa parte da Teoria de Sistemas Dinâmicos pode ser construída sobre espaços métricos gerais. Em particular, os espaços métricos compactos e os espaços métricos conexos aparecem de forma decisiva aí.
- A teoria de dimensão encontra também aplicações aos Sistemas Dinâmicos.